



Pauta Auxiliar N° 3
25 de Agosto de 2004

Pregunta 1

Primero se debe llevar el problema planteado a la forma canónica:

$$\begin{aligned} \min z &= c^T \vec{x} \\ \text{s.a. } A\vec{x} &\leq \vec{b} \\ \vec{x} &\leq 0 \end{aligned}$$

Para ello, se deben agregar variables de holgura (x_3 y x_4) al problema original y transformarlo en un problema de minimización, quedando como sigue:

$$\begin{aligned} \min z &= -3 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 18 \\ & x_1 + x_4 = 4 \\ & x_2 + x_5 = 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, las variables básicas son x_3 , x_4 y x_5 , y el problema matricialmente queda:

$$\begin{aligned} \min z &= (-3 \ -5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ \text{s.a.} \quad & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lo que corresponde a: $\min z = c_R \cdot \vec{x}_R + c_B \cdot \vec{x}_B$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & R\vec{x}_R + B\vec{x}_B = \vec{b} \end{aligned}$$

Veamos si ésta solución es óptima. Para ello, se deben calcular los costos reducidos como y si todos resultan positivos entonces estamos en el óptimo. Calculemos:

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R$$

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar:

Iteración 1:

- Criterio de entrada.

Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es -5 y corresponde a la variable x_2 , luego esta variable ingresa a la base.

- Criterio de salida.

Para ver quien sale de la base, es necesario obtener los valores de \bar{A} y de \bar{b} , para ello:

$$\bar{A} = B^{-1}R$$

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

Pero como $B = I$, por lo tanto $B^{-1} = I$, entonces:

$$\bar{A} = B^{-1}R = R$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = b$$

Utilizando estos valores se tiene:

$$\min_{a_{i2} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}}{a_{i2}} \right\} = \left\{ \frac{18}{2}, \frac{6}{1} \right\} = \{9, 6\} = 6 \mapsto x_5$$

Entonces x_5 sale de la base.

- Criterio de optimalidad.

Para poder evaluar la optimalidad de ésta nueva solución, se debe obtener su forma canónica.

$$\min z = (-30) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

s.a.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, con esta información veamos si es óptima esta solución:

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución no es óptima, entonces se debe empezar a iterar.

Iteración 2:

- Criterio de entrada.

Entra a la base aquella variable no básica que tenga costos reducidos menores (entre las que poseen costos reducidos negativos). En este caso, el menor costo reducido es -3 y corresponde a la variable x_1 , luego esta variable ingresa a la base.

- Criterio de salida.

Para ver quien sale de la base, es necesario obtener los valores de \bar{A} y de \bar{b} , para ello:

$$\bar{A} = B^{-1}R$$

En este caso se tiene que:

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = B^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Utilizando estos valores se tiene:

$$\min_{a_{i1} > 0} \left\{ \frac{\vec{b}}{a_{i1}} \right\} = \left\{ \frac{6}{3}, \frac{4}{1} \right\} = \{2, 4\} = 2 \mapsto x_3$$

Entonces x_3 sale de la base.

- Criterio de optimalidad.

Para poder evaluar la optimalidad de ésta nueva solución, se debe obtener su forma canónica

$$\min z = (00) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

s.a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora con esta información veamos si es óptima la solución.

$$\bar{c}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego la solución encontrada es óptima, entonces se deja de iterar.

Pregunta 2

a) Un vértice será óptimo si todos los costos reducidos no básicos son mayores o iguales a 0. Para el problema planteado quiere decir que $c_j \geq 0$ para todo j no básico, donde:

$$\bar{c}_j = c_j - c_B B^{-1} R_{\bullet j}$$

y R es tal que $A = [B \mid R]$

b) Si en el óptimo existe al menos una variable no básica con $\bar{c}_k = 0$, entonces el problema admite óptimos alternativos.

c) El problema es no acotado si $\bar{a}_{\bullet s} \leq 0$ donde $\bar{a}_{\bullet s} = B^{-1} R_{\bullet s}$ con $R_{\bullet s}$ columna de R (tal que $A = [B \mid R]$) que entra en la base de la iteración.

d) Una solución básica es degenerada cuando existe al menos una variable básica x_s , igual a 0.

e) La cota superior del número de soluciones básicas factibles distintas es la forma de escoger m columnas de entre las n posibles de la matriz, esto corresponde a:

$$\binom{n}{m}$$

Problema 3

a) Sin perder generalidad, suponga que la variable x_r se obtiene de la k -ésima restricción. Para que x_r no cambie de valor al ingresar x_s a la base, se debe tener: $\bar{a}_{k,s} = 0$

b) Suponga que x_j es variable no básica en la solución óptima. Si x_j ingresara a la base deberá tomar el valor:

$$\max_{\bar{a}_{is} < 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \right\}_s = \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{ps}}$$

Sea $\bar{c}_j > 0$ el costo modificado o reducido de x_j en la última forma canónica. Luego al ingresar x_j a la base, la función objetivo aumentará en:

$$\bar{c}_j \cdot \frac{\bar{b}_p}{\bar{a}_{ps}} \quad (1)$$

Para toda variable no básica se debe obtener el resultado (1). El menor de estos resultados determinará la variable que ingresará a la base.

La variable que sale de la base se determina con el procedimiento habitual del algoritmo simplex.

Al ejecutar la iteración se obtendrá la solución básica factible pedida.

c) Si $\bar{b}_i < 0$ entonces la forma canónica entrega una solución básica no factible. Se debe agregar variables artificiales y desarrollar una fase 1 y luego la fase 2.

d) Criterio de entrada: $\max_{\bar{c}_j < 0} \{\bar{c}_j\} = \bar{c}_s$

Criterio de salida

$$\max_{\bar{a}_{is} < 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right\}_s$$

e) Como se conocen los costos modificados de la F. O. en el óptimo se pueden identificar las variables no básicas en el óptimo y por tanto las variables básicas de la solución óptima. Si se conocen las variables básicas en el óptimo se puede definir la matriz básica del óptimo. Luego se puede calcular $\bar{b}^* = B^{*-1} b$

El vector \bar{b}^* contiene el valor de las variables básicas en el óptimo.

Dudas y/o consultas:
Marianela Pereira C.
mapereir@ing.uchile.cl